## **基础课37 空间中点、直线、平面之间的位置关系**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **考点考向** | **课标要求** | **真题印证** | **考频热度** | **核心素养** |
| 平面性质的应用 | 了解 | 2020年新课标Ⅲ卷（文） | ★☆☆ | 逻辑推理 |
| 空间中点、直线、平面之间的位置关系 | 理解 | 2021年新高考Ⅱ卷 | ★★★ | 直观想象数学运算 |
| 异面直线 | 掌握 | 2021年全国乙卷（理）  2021年全国乙卷（文） | ★★☆ | 直观想象数学运算 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，空间中的线面关系是高考常考内容，一般以选择题或填空题的形式出现，试题难度中等及以下，但本基础课内容是高考多选题命题的常用素材，备考时，注意对多选题的训练 | | | |

### **基础知识·诊断**

#### **夯实基础**

##### **一、与平面有关的基本事实及推论**

1.三个基本事实

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 基本事实 | 内容 | 图形 | 符号 |
| 基本事实1 | 过①不在同一条直线上的三个点，有且只有一个平面 |  | ，，三点不共线存在唯一的平面，使，， |
| 基本事实2 | 如果一条直线上的②两个点在一个平面内，那么这条直线在这个平面内 |  | ，，且， |
| 基本事实3 | 如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条③过该点的公共直线 |  | ，且，且 |

2.三个推论

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 推论 | 内容 | 图形 | 作用 |
| 推论1 | 经过一条直线和这条直线外一点，有且只有一个平面 |  | 确定平面的依据 |
| 推论2 | 经过两条相交直线，有且只有一个平面 |  |
| 推论3 | 经过两条平行直线，有且只有一个平面 |  |

##### **二、空间中点、直线、平面之间的位置关系**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | 直线与直线 | 直线与平面 | 平面与平面 |
| 平行关系 | 图形语言 |  |  |  |
| 符号语言 |  |  |  |
| 相交关系 | 图形语言 |  |  |  |
| 符号语言 |  |  |  |
| 独有关系 | 图形语言 |  |  |  |
| 符号语言 | ，是异面直线 |  |  |

##### **三、基本事实4和等角定理**

基本事实4：平行于同一条直线的两条直线④互相平行.

等角定理：如果空间中两个角的两边分别对应平行，那么这两个角⑤相等或互补.

##### **四、异面直线所成的角**

1.定义：设，是两条异面直线，经过空间任意一点作直线，，把与所成的角叫作异面直线与所成的角（或夹角）.

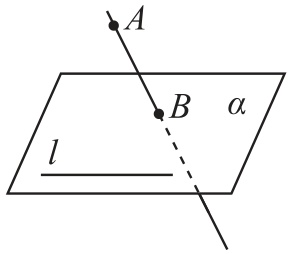
2.取值范围：⑥.

3.特别地，如果两条异面直线所成的角是直角，那么我们就说这两条异面直线互相垂直.

###### **知识 拓展**

1.异面直线判定的一个定理

过平面外一点和平面内一点的直线，与平面内不过该点的直线是异面直线．用符号可以表示为:若 ， , ,，则直线与是异面直线（如图）.



2.唯一性定理

（1）过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行．

（2）过直线外一点有且只有一个平面与已知直线垂直．

（3）过平面外一点有且只有一个平面与已知平面平行．

（4）过平面外一点有且只有一条直线与已知平面垂直．

#### **诊断自测**

##### **题组1 走出误区**

1. 判一判.（对的打“√”，错的打“×”）

（1） 平面 ， 有一个公共点，就说明 ， 相交于过点的任意一条直线.( × )

（2） 两两相交的三条直线最多可以确定三个平面.( √ )

（3） 若两个平面有三个公共点，则这两个平面重合.( × )

（4） 没有公共点的两条直线是异面直线.( × )

2. （易错题）设,是空间内的两条直线， , 是空间内的两个平面，则下列选项中不正确的是( C ).

A. 当 时，“ ”是“ ”的充要条件

B. 当 时，“ ”是“ ”的充分不必要条件

C. 当 时，“ ”是“”的必要不充分条件

D. 当 时，“ ”是“”的充分不必要条件

【**易错点**】①忽视空间中直线与直线的位置关系有三种情况：平行、相交或异面；②混淆充分条件与必要条件的概念.

[解析]当 时，若 ，则或与异面；若，则 或 ，所以“ ”是“”的既不充分也不必要条件.故选.

##### **题组2 走进教材**

3. （多选题）（人教A版必修改编）下列选项正确的是( BC ).

A. 三点确定一个平面

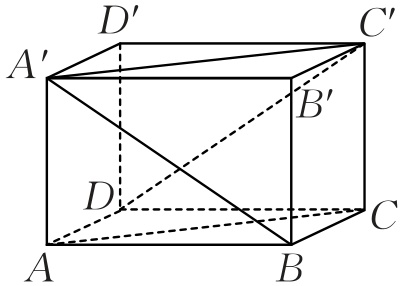
B. 一条直线和直线外一个点确定一个平面

C. 梯形可确定一个平面

D. 圆心和圆上两点确定一个平面

[解析]对于，三个不在同一条直线上的点，确定一个平面，故错误. 对于，直线和直线外一点，确定一个平面，故正确. 对于，两条平行直线确定一个平面，梯形有一组对边平行，另一组对边不平行，故梯形可确定一个平面，故正确. 对于，圆的直径不能确定一个平面，所以若圆心和圆上的两点在同一条直径上，则无法确定一个平面，故错误.故选.

4. （多选题）（人教A版必修改编）如图，在长方体中，下列说法正确的是( ABD ).



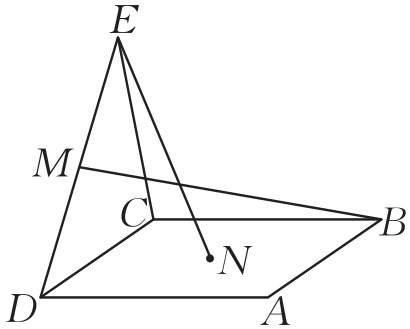
A. 直线与直线相交 B. 直线与直线平行

C. 直线与直线相交 D. 直线与直线异面

[解析]由题图知，直线与直线相交，直线与直线平行，直线与直线异面，直线与直线异面.故选.

##### **题组3 走向高考**

5. [2019·新课标Ⅲ卷]如图，为正方形的中心，为正三角形，平面 平面,是线段的中点，则( B ).



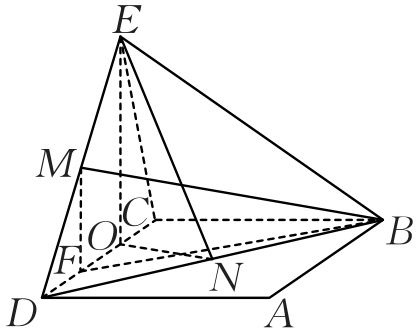
A. ，且直线,是相交直线

B. ，且直线,是相交直线

C. ，且直线,是异面直线

D. ，且直线,是异面直线

[解析]如图，作于点，连接，过点作于点，连接.因为平面 平面，平面 平面,, 平面，所以 平面，同理， 平面，所以与均为直角三角形. 设正方形的边长为2，易得，，，所以,，所以，所以.故选.

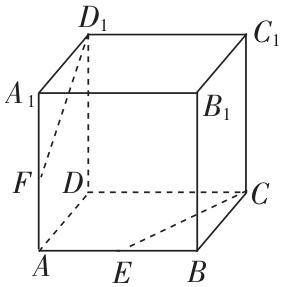


### **考点聚焦·突破**

#### **考点一 基本事实的应用［多维探究］**

##### **证明三点共线角度1**

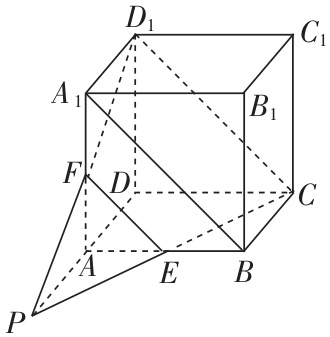
典例1 如图所示，在正方体中，，分别是和的中点.求证：



（1），，，四点共面；

（2），，三线共点．

[解析]（1）如图，连接，，.



因为，分别是，的中点，所以.

又，所以，所以，，，四点共面.

（2）因为，，所以与必相交，设交点为，如图所示.

则由， 平面，得 平面.同理 平面.

又平面 平面，所以，所以，，三线共点.

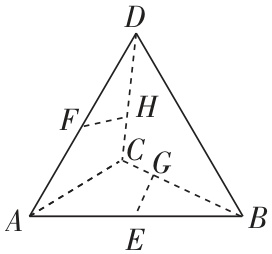
变式设问 若本例中平面与交于点，求证：，，三点共线．

[解析]连接（图略），因为与均为正方体的体对角线，所以与相交，

则令与的交点为，则，，三点共线，因为 平面，所以与平面的交点为，与重合，故，，三点共线.

##### **证明三线共点角度2**

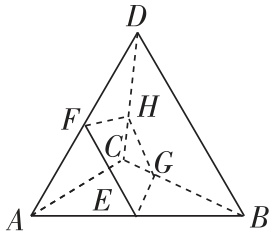
典例2 已知空间四面体（如图所示），，分别是，的中点，，分别是，上的点，且，.求证：



（1），，，四点共面；

（2），，三线共点．

[解析]（1）如图，连接，，因为，分别是，的中点，所以.



又因为，，

所以，所以，

所以，，，四点共面.

（2）由题意得与直线不平行，但共面，

所以设，所以 平面， 平面.

又因为平面 平面，

所以，所以，，三线共点.

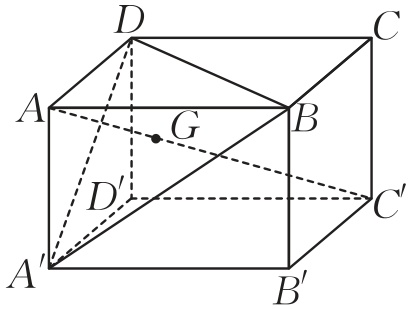


**共面、共线、共点问题的证明方法**

|  |  |
| --- | --- |
| 证明共面的方法 | ①先确定一个平面，再证其余的线（或点）在这个平面内；②证两平面重合 |
| 证明共线的方法 | ①先由两点确定一条直线，再证其他各点都在这条直线上；②直接证明这些点都在同一条特定直线上 |
| 证明线共点的方法 | 先证其中两条直线交于一点，再证其他直线经过该点 |

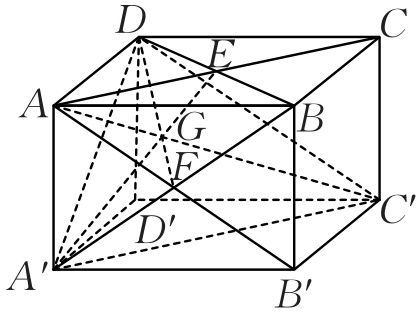
##### **多维训练**

1. 已知为长方体，对角线与平面相交于点，则为的( B ).



A. 垂心 B. 重心 C. 内心 D. 外心

[解析]如图，连接交于点，连接，连接，，，连接，



由为长方体，所以为的中点，为的中点，

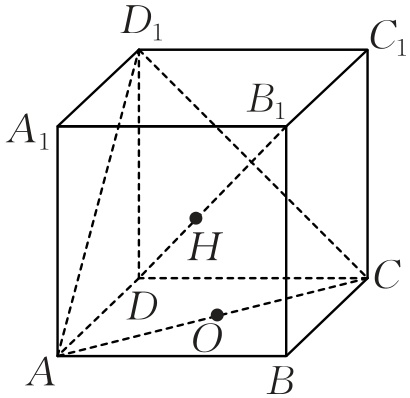
则，为的中线，

平面 平面，对角线与平面相交于点，则，

平面 平面，对角线与平面相交于点，则，

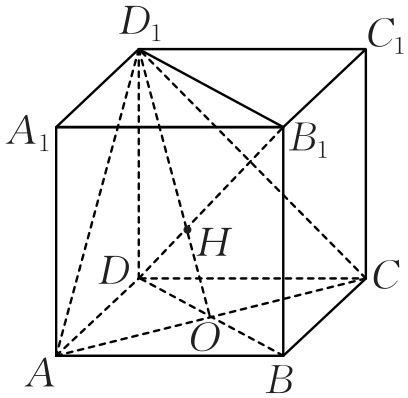
所以为与的交点，所以为的重心.故选.

2. 如图，在正方体中，为正方形的中心，为直线与平面的交点.求证：，，三点共线.



[解析]如图，连接，，则，

因为，，所以四边形为平行四边形，

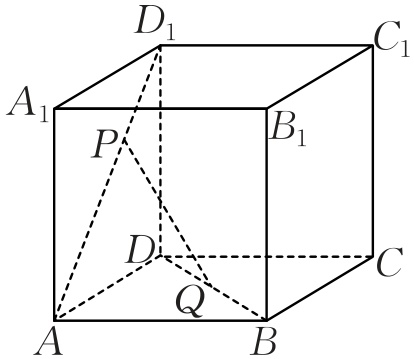


又， 平面，则 平面，

因为平面 平面，所以，即，，三点共线.

#### **考点二 空间中点、直线、平面之间的位置关系的判断［自主练透］**

1. 如图，已知正方体，点在直线上，为线段的中点，则下列结论不正确的是( C ).

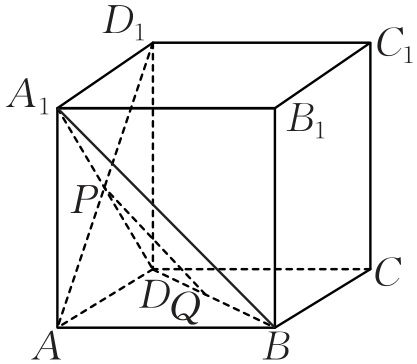


A. 存在点，使得 B. 存在点，使得

C. 直线始终与直线异面 D. 直线始终与直线异面

[解析]在正方体中，易得 平面，因为点在直线上，为线段的中点，

所以当点和点重合时， 平面，所以，故正确；



如图，连接，，当为线段的中点时，为的中位线，即，故正确；

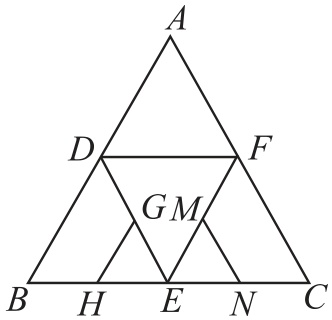
平面，当点和点重合时， 平面，所以直线和在同一平面内，故不正确；

平面， 平面，，

所以直线始终与直线不相交，且不平行，

所以直线与直线是异面直线，故正确.故选.

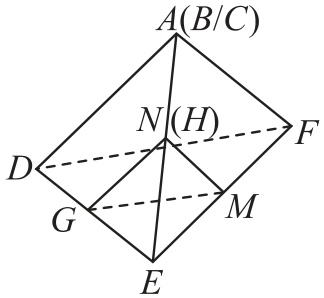
2. （多选题）如图，这是正四面体的平面展开图，，，，分别为，，，的中点，则在这个正四面体中( BCD ).



A. 与平行 B. 与为异面直线

C. 与所成的角为 D. 与垂直

[解析]将正四面体的平面展开图还原成正四面体，如图所示，



其中点与点重合，，，三点重合，易知与异面，与异面.连接，

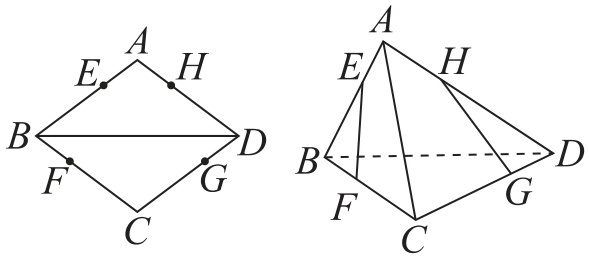
为等边三角形，

与成 角.

由图易得，又，

.故选.

3. 如图，，，，分别是菱形的边，，，上的点，且，，，，现将沿折起，得到空间四边形，在折起过程中，下列说法正确的是( C ).



A. 直线，有可能平行

B. 直线，一定异面

C. 直线，一定相交，且交点一定在直线上

D. 直线，一定相交，但交点不一定在直线上

[解析]，，

，则，且，

又，，

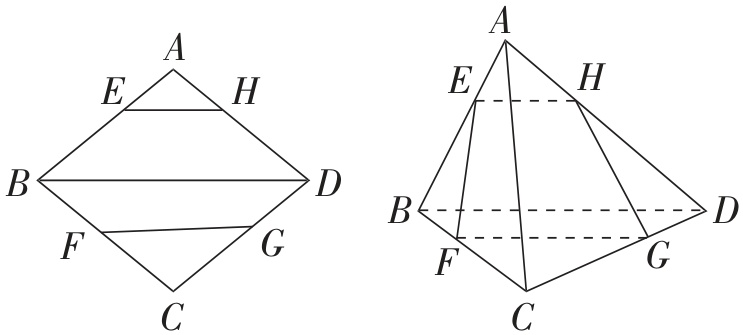
，则，且，

，且，

四边形为平面四边形，故直线，一定共面，故错误；

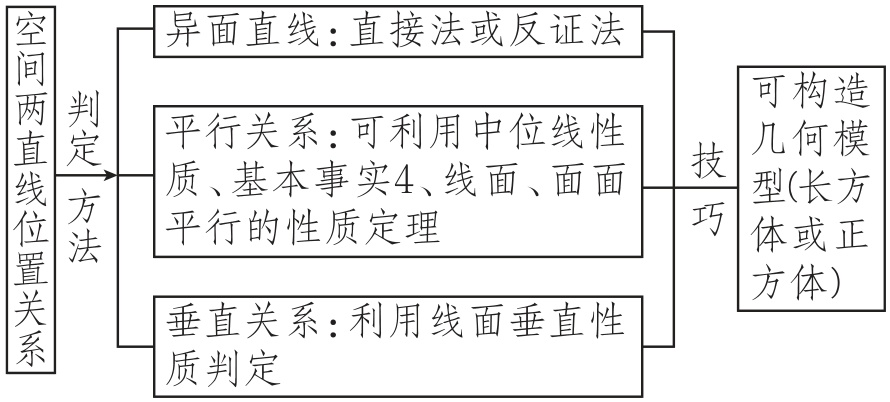
若直线与平行，则四边形为平行四边形，可得，与矛盾，故错误；

由，且，，，可得直线，一定相交，设交点为，则，又 平面，可得 平面，同理， 平面，而平面 平面，，即直线，一定相交，且交点一定在直线上，故正确，错误.故选.



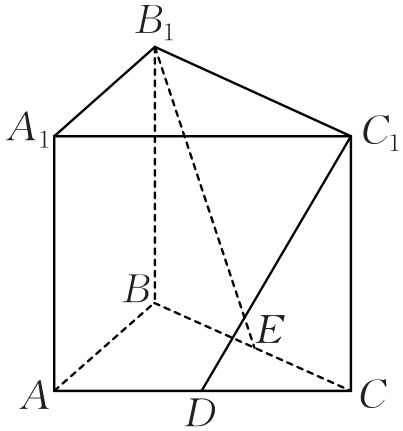


**空间两直线位置关系的判定方法**



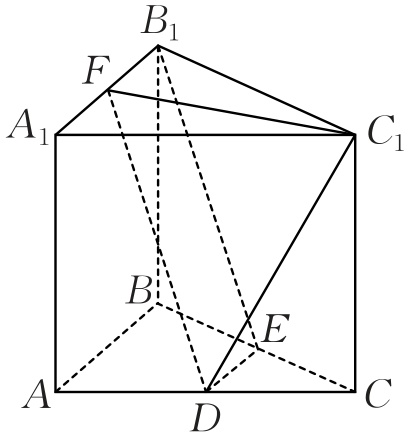
#### **考点三 异面直线所成的角［师生共研］**

典例3 [2024·湖北联考]在直三棱柱中，,,,分别为,的中点，则异面直线与所成角的余弦值为( D ).



A. B. C. D.

[解析]设，如图，取的中点，连接,,，则,



因为,分别为,的中点，

所以，.

因为，，

所以，，

所以四边形为平行四边形，所以，所以为异面直线与所成的角或其补角.

因为,,,分别为,的中点，

所以,,，

所以.故选.



**求异面直线所成角的四个步骤**

1.找出（或作出）异面直线所成的角——用平移法，若题设中有中点，常考虑中位线；若异面直线依附于某个几何体，且对异面直线平移有困难时，可利用该几何体的特殊点，使异面直线转化为相交直线．

2.证明——证明所找出（或作出）的角等于要求的角.

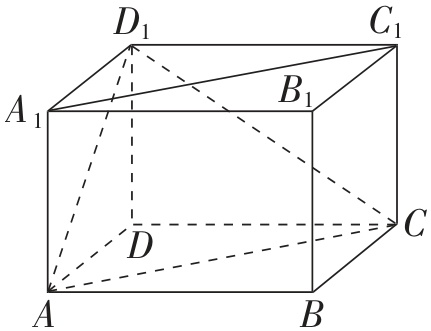
3.计算——转化为求一个三角形的内角，通过解三角形，求出所找出（或作出）的角．

4.结论——设由步骤3所求得的角的大小为 .若 ，则 为所求；若 ，则 为所求．

##### **针对训练**

[2024·长春模拟]已知在长方体中，，，，试求异面直线与所成角的余弦值.

[解析]如图，连接，，， 四边形为平行四边形，



，

则即为异面直线与所成的角或其补角，

.